含扰动参数时滞电力系统鲁棒稳定性分析*

沈力,肖会芹
(湖南工业大学 电气与信息工程学院,湖南 株洲 412007)

摘要:针对系统中多时滞耦合以及小扰动不确定因素,文章给出多时滞不确定电力系统鲁棒稳定新判据。应用积分不等式新处理方法,结合自由权矩阵有助于降低现有结果的保守性,运用 Schur 补定理有效地处理了系统中的不确定参数。最后,以单机无穷大系统,典型二阶单、双时滞系统为例,得出电力系统所能承受的时滞稳定裕度,验证了所提方法的有效性和优越性。

关键词:多时滞;电力系统;鲁棒稳定;不确定因素
DOI:10.19753/j.issn1001-1390.2019.014.011
中图分类号:TM712 **文献标识码**:A **文章编号**:1001-1390(2019)14-0062-06

Robust stability analysis of power systems with time delays and uncertain parameters

Shen Li, Xiao Huiqin
(*School of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, Hu'nan, China*)

Abstract: In view of the multiple time delay coupling and some micro-variations uncertain parameters, a new robust stability criteria for power system with multiple time delays and uncertain parameters is issued in this paper. It is noted that the application of a new handing method of integral inequality and a free matrix introduced can reduce the conservatism of the result, and especially that some uncertain parameters can be effectively handled by adopting the Schur theorem. Finally, taking the single-machine infinite-bus system and a typical second-order time-delay system as an example, the efficiency and superiority of the proposed approach are verified to obtain the robust time-delay margin of the power system.

Keywords: multiple time delays, power system, robust stability, uncertain parameters

0 引 言

随着智能电网发展,现代电力系统更加趋向于多互联,大规模方向发展,因此仅依赖传统的区域信号控制方法将无法满足系统对性能的要求。近些年,随着向量测量单元 PMU[1](Phase Measurement Unit)技术,全球定位系统 GPS(Global Positioning System)技术和现代电力通信技术的广域测量系统 WAMS(Wide-Area Measurement System)的应用,使得将本地的电力系统信息同步采样并传送至远程控制中心成为可能[2]。但是,WAMS 的应用将电力系统变成了一个时滞系统,各类广域控制信道中难免存在时滞,直接影响到电力系统的稳定性。所以,研究电力系统所能承受的时滞稳定裕度是很有意义的。此外,现代电力系统还需要考虑各时滞之间的相互耦合,以及建模所引起的不确定参数。因此,研究多时滞不确定电力系统的稳定性更具实际意义。

目前,时滞系统的研究方法通常是基于 Lyapunov 直接法的时域法[3-15]。通过构造 Lyapunov 泛函[3-6],借助 Lyapunov 稳定性理论,得出系统的稳定判据,最后借助线性矩阵不等式 LMI(Linear Matrix Inequality)求解得出系统的时滞稳定裕度。文献[3-4]提出新的积分不等式处理方式,有效地降低了结果的保守性;文献[5]引入自由权矩阵来降低双时滞系统判据的保守性;文献[6]利用 Wirtinger 不等式对泛函的导数中一次积分项进行有效放缩;文献[7-9]主要研究电力系统单时滞系统的情况;文献[10-13]中的试验结果具有较大的保守性;文献[14]采用“时滞分割”思想降低试验结果的保守性;文献[15]将 Wirtinger 不等式引入双时滞系统。

* 基金项目:国家自然科学基金资助项目(61703153)

本文同时考虑多时滞和不确定扰动参数，利用文献[3]对积分不等式的处理方法对求导后的 Lyapunov 泛函进行放缩，然后引入自由权矩阵，利用 Schur 定理处理不确定参数，最后给出适用多时滞不确定电力系统的鲁棒稳定判据。

文章采用如下标号：$\boldsymbol{R}^n$ 和 $\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 分别表示实数域的 n 维向量空间和 $n\times m$ 维矩阵空间；$\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 表示 n 阶正对称矩阵集合；$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 表示矩阵的转置和逆；$\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 表示适合维数的单位矩阵和零矩阵；$\boldsymbol{P}>0$ 表示矩阵 $\boldsymbol{P}$ 对称正定；$Sym\{\boldsymbol{X}\}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$；"$*$"表示矩阵中的对称项；$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ 表示对角矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$。

1 系统模型

通常，含有多时滞的电力系统可表示如下：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}x(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x}(t-h_i)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t),\ t\in[-h,0]\end{cases}\tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$，是状态向量；$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}_i$ 为系统矩阵；$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是初始状态；$h_i\in\boldsymbol{R}$ 是系统时滞常数，$h=\max(h_1,h_2,\cdots,h_m)$ 系统最大时滞，m 为电力系统中包含的时滞个数。

然而，实际电力系统中往往存在一定的扰动，此时系统矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}_i$ 都会一定变化，一般使用不确定参数进行描述，则系统(1)变为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})x(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}(\boldsymbol{B}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i)x(t-h_i)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t),\ t\in[-h,0]\end{cases}\tag{2}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{A}$，$\Delta\boldsymbol{B}_i$ 为系统扰动项参数，满足 $[\Delta\boldsymbol{A},\Delta\boldsymbol{B}_1,\cdots,\Delta\boldsymbol{B}_m]=\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)[\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{E}_1,\cdots,\boldsymbol{E}_m]$，其中 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{E}_1,\cdots,\boldsymbol{E}_m$ 是已知常数矩阵，$\boldsymbol{F}(t)$ 为时变矩阵，满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{I}$。

为得出系统鲁棒稳定判据，给出以下引理。

引理 1[3]：定义 x 是在区间 $[\alpha,\beta]\to\boldsymbol{R}^n$ 上的可导函数，对于任意矩阵 $\boldsymbol{R}(\in\boldsymbol{R}^{n\times n})>0$，$\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$，$\boldsymbol{T}_3\in\boldsymbol{R}^{4n\times n}$，有积分不等式(3)成立：

$$-\int_{\alpha}^{\beta}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\vartheta}\tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{\vartheta}=\left[\boldsymbol{x}^T(\beta)\boldsymbol{x}^T(\alpha)\ \frac{1}{\tau}\int_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{x}^T(s)\mathrm{d}s\ \frac{2}{\tau^2}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{s}\boldsymbol{x}^T(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\Omega}=\tau(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}}+\frac{1}{3}\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{T}}+\frac{1}{5}\boldsymbol{T}_3\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}})+Sym\{\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{\Pi}_a+\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{\Pi}_b+\boldsymbol{T}_3\boldsymbol{\Pi}_c\}$，$\boldsymbol{\Pi}_a=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{\Pi}_b=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{\Pi}_c=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_3+6\boldsymbol{e}_4$，$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$

引理 2[17]：对于常数矩阵 $\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，标量 $\gamma>0$ 和向量函数 $\dot{\boldsymbol{x}}(t):[-\gamma,0]$ 满足积分 $\int_{t-\gamma}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$，那么有：

$$-\gamma\int_{t-\gamma}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\zeta}_{\gamma}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\zeta}_{\gamma}(t)\tag{4}$$

式中：

$$\boldsymbol{\zeta}_{\gamma}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-\gamma)\end{bmatrix},\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{W} & \boldsymbol{W}\\ \boldsymbol{W} & -\boldsymbol{W}\end{bmatrix}。$$

引理 3[16]：给定适当维数矩阵 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{E}$，有 $\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{HFE}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}<0$，对所有满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{I}$ 的 $\boldsymbol{F}$，当且仅当存在 $\lambda>0$，有：

$$\boldsymbol{Z}+\lambda\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}+\lambda^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}<0\tag{5}$$

2 多时滞电力系统稳定性判据

本节使用自由矩阵积分不等式方法，同时考虑多时滞和不确定扰动因素，给出系统鲁棒稳定性判据。首先向量、矩阵定义如下：

$$\boldsymbol{v}_1(t)=\int_{t-h_i}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s,\ \boldsymbol{v}_2(t)=\int_{t-h_i}^{t}\int_{t-h_i}^{s}\boldsymbol{x}(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

$$\boldsymbol{\eta}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{v}_1(t)\quad\boldsymbol{v}_2(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\eta}_1(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_i)]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2(t)=\left[\frac{\boldsymbol{v}_1(t)}{h_i}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\eta}_3(t)=\left[\frac{2\boldsymbol{v}_2(t)}{{h_i}^2}\right]^{\mathrm{T}},i=1,2,\cdots,m$$

$$\boldsymbol{\xi}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(t)\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{e}_i=[\boldsymbol{0}_{n\times(i-1)n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{0}_{n\times(3m+2-i)n}],i=1,2,\cdots,3m+2$$

给出如下系统鲁棒稳定性判据。

定理 1：如果存在标量 $\lambda>0$，矩阵 $\boldsymbol{P}(\in\boldsymbol{R}^{(2m+1)n\times(2m+1)n})>0$，$\boldsymbol{Q}_i$，$\boldsymbol{R}_i(\in\boldsymbol{R}^{n\times n})>0(i=1,2,\cdots,m)$，$\boldsymbol{Z}_{ij}(\in\boldsymbol{R}^{n\times n})>0(i=1,2,\cdots,m-1;j=i+1,i+2,\cdots,m)$，对称矩阵 $\boldsymbol{L}_i$，$\boldsymbol{N}_i$，$\boldsymbol{M}_i\in\boldsymbol{R}^{4n\times n}(i=1,2,\cdots,m)$，以及任意矩阵 $\boldsymbol{Y}_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}(i=1,2,\cdots,m+2)$，对于条件 $0<h_1,h_2,\cdots,h_m<h$，有不等式(6)成立，则系统(2)鲁棒稳定。

$$\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{\Phi}} & \boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{U}_1 & \cdots & \boldsymbol{U}_m\\ * & -\lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ * & * & \boldsymbol{W}_1 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & \cdots & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & * & \boldsymbol{W}_m\end{bmatrix}<0\tag{6}$$

其中：$\overline{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2+\boldsymbol{\Phi}_3+\lambda\boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_2$；

$$\boldsymbol{\Phi}_1=Sym\{\boldsymbol{\Pi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Pi}_2\}+\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{e}_{i+1})$$

$$+ e_{3m+2}^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{m} h_i \boldsymbol{R}_i + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}(h_i - h_j)^2 \boldsymbol{Z}_{ij}\Big)\boldsymbol{e}_{3m+2}\ ;$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2 = \sum_{i=1}^{m} Sym\{\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}} L_i \boldsymbol{\Pi}_3 + \boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}} N_i \boldsymbol{\Pi}_4 + \boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_i \boldsymbol{\Pi}_5\}\ ;$$

$$\boldsymbol{\Phi}_3 = Sym\{\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}_8\} + \sum_{i=1}^{m-1}\boldsymbol{\Pi}_9^{\mathrm{T}} Z_i \boldsymbol{\Pi}_9\ ;$$

$$\boldsymbol{\Phi}_4 = \sum_{i=1}^{m} h_i \boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{L}_i\boldsymbol{R}_i^{-1}\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{R}_i^{-1}\boldsymbol{N}_i^{\mathrm{T}} \\ + \frac{1}{5}\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{R}_i^{-1}\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}} \end{Bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_6\ ;$$

$$\boldsymbol{U}_i = [\sqrt{h_i}\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_i \quad \sqrt{h_i}\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i \quad \sqrt{h_i}\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_i]\ ;$$

$$\boldsymbol{W}_i = \mathrm{diag}\{-\boldsymbol{R}_i, -3\boldsymbol{R}_i, -5\boldsymbol{R}_i\}, i = 1, 2, \cdots, m\ ;$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \Big[\sum_{i=1}^{m+1}\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{H} + \boldsymbol{e}_{3m+2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{m+2}\boldsymbol{H}\Big]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\theta}_2 = \Big[\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{e}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\Big]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{Z}_i = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{Z}_{ij} & \boldsymbol{Z}_{ij} \\ \boldsymbol{Z}_{ij} & -\boldsymbol{Z}_{ij}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_1 = [\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \quad \overline{\boldsymbol{\Pi}_1} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\Pi}_1}}]^{\mathrm{T}};$$

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}_1} = [\mathrm{h}_1\boldsymbol{e}_{m+2}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad h_m\boldsymbol{e}_{2m+1}^{\mathrm{T}}];$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Pi}_1}} = [0.5h_1^2\boldsymbol{e}_{2m+2}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad 0.5h_m^2\boldsymbol{e}_{3m+1}^{\mathrm{T}}];$$

$$\boldsymbol{\Pi}_2 = [\boldsymbol{e}_{3m+2}^{\mathrm{T}} \quad \overline{\boldsymbol{\Pi}_2} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\Pi}_2}}]^{\mathrm{T}};$$

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}_2} = [\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_{m+1}^{\mathrm{T}}];$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Pi}_2}} = [h_1(\boldsymbol{e}_{m+2}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}) \quad \cdots \quad h_m(\boldsymbol{e}_{2m+1}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_{m+1}^{\mathrm{T}})]\ ;$$

$$\boldsymbol{\Pi}_3 = [\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_{i+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_4 = [\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{e}_{i+1}^{\mathrm{T}} - 2\boldsymbol{e}_{i+m+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\ ;$$

$$\boldsymbol{\Pi}_5 = [\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_{i+1}^{\mathrm{T}} - 6\boldsymbol{e}_{i+m+1}^{\mathrm{T}} + 6\boldsymbol{e}_{i+2m+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_6 = [\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{e}_{i+1}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{e}_{i+m+1}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{e}_{i+2m+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\ ;$$

$$\boldsymbol{\Pi}_7 = \Big[\sum_{i=1}^{m+1}\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_i + \boldsymbol{e}_{3m+2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{m+2}\Big]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_8 = \Big[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{e}_{i+1}^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_{3m+2}^{\mathrm{T}}\Big]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Pi}_9 = [\boldsymbol{e}_{i+2}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{e}_{i+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

证明：选取 Lyapunov－Krasovskii 泛函：

$$\boldsymbol{V}(t) = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}(t) + \sum_{i=1}^{m}\int_{t-h_i}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m}\int_{-h_i}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_i\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + k\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}(h_i - h_j)\int_{-h_i}^{-h_j}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}_{ij}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

当 $\boldsymbol{P} > 0, \boldsymbol{Q}_i > 0, \boldsymbol{R}_i > 0$ 与 $\boldsymbol{Z}_{ij} > 0$ 时，假设 $h_i > h_j, k = 1$，则函数正定，即 $\boldsymbol{V}(t) > 0$。

对 $\boldsymbol{V}(t)$ 求导可得：

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{\xi}(t) - \sum_{i=1}^{m}\int_{t-h_i}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_i\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}(h_i - h_j)\int_{t-h_i}^{t-h_j}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}_{ij}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s \tag{8}$$

由引理 1 得：

$$-\int_{t-h_i}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_i\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s \leqslant \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{\Phi}_2 + \boldsymbol{\Phi}_4)\boldsymbol{\xi}(t) \tag{9}$$

由引理 2 得：

$$-(h_i - h_j)\int_{t-h_i}^{t-h_j}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}_{ij}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s \leqslant \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Pi}_9^{\mathrm{T}}Z_i\boldsymbol{\Pi}_9\boldsymbol{\xi}(t) \tag{10}$$

考虑到任意合适维度矩阵 $\boldsymbol{Y}_i \in \boldsymbol{R}^{n\times n}(i = 1, 2, \cdots, m+2)$，下列等式成立：

$$2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}_1 + \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_i)\boldsymbol{Y}_{i+1} + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}_{m+2}] \times [-\dot{\boldsymbol{x}})((t) + (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{B}_i + \Delta\boldsymbol{B}_i)\boldsymbol{x}(t-h_i)] = 0 \tag{11}$$

由：$[\Delta\boldsymbol{A}, \Delta\boldsymbol{B}_1, \cdots, \Delta\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}] = \boldsymbol{HF}(t)[E_0, E_1, \cdots, E_m]$，得式(11)可转化为：

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix} Sym\{\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\Pi}_8\} \\ + \boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{T}}F(t)\boldsymbol{\theta}_1\end{pmatrix}\xi(t) = 0 \tag{12}$$

结合式(8)～式(12)，得：

$$\dot{\boldsymbol{V}}(x_t) \leqslant \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\xi}(t) \tag{13}$$

式中：

$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_0 + \boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{\theta}_1$；$\boldsymbol{\Phi}_0 = \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 + \boldsymbol{\Phi}_3 + \boldsymbol{\Phi}_4$

如果 $\boldsymbol{\Phi}_0 + \boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{\theta}_1 < 0$，当且仅当存在任意 $\lambda > 0$ 时，

由引理 3 得：

$$\boldsymbol{\Phi}_0 + \lambda^{-1}\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_1 + \lambda\boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_2 < 0 \tag{14}$$

应用 Schur 补定理，式(14)等价于式(6)，因此，式(6)成立，有 $\dot{\boldsymbol{V}}(t) < 0$，则系统(2)稳定，证毕。

当 $h_i < h_j$ 时，$k = -1$，经证明，同定理 1 结果。

对于定理 1 中增广项 $\eta(\mathrm{t})$ 变换为：

$\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{v}_1(t)]^{\mathrm{T}}$，可得出如下推论。

推论 1：如果存在标量 $\lambda > 0$，矩阵 $\hat{\boldsymbol{P}}\ (\in \boldsymbol{R}^{(m+1)n\times(m+1)n}) > 0, \boldsymbol{Q}_i, \boldsymbol{R}_i(\in \boldsymbol{R}^{n\times n}) > 0(i = 1, 2, \cdots, m)$，$\boldsymbol{Z}_{ij}(\in \boldsymbol{R}^{n\times n}) > 0(i = 1, 2, \cdots, m-1; j = i+1, i+2, \cdots, m)$，对称矩阵 $\boldsymbol{L}_i, \boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{M}_i \in \boldsymbol{R}^{4n\times n}(i = 1, 2, \cdots, m)$，以及任意矩阵 $\boldsymbol{Y}_i \in \boldsymbol{R}^{n\times n}(i = 1, 2, \cdots,$

$m+2$),对于条件 $0<h_1, h_2, \cdots h_m<h$,有不等式(15)成立,则系统(2)鲁棒稳定。

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Phi}} & \boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{U}_1 & \cdots & \boldsymbol{U}_m \\ * & -\lambda \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ * & * & \boldsymbol{W}_1 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & \cdots & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & \boldsymbol{W}_m \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 + \boldsymbol{\Phi}_3 + \lambda \boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\theta}_2$;

$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1 = \mathrm{Sym}\{\hat{\boldsymbol{\Pi}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \hat{\boldsymbol{\Pi}}_2\} + \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_{i+1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{e}_{i+1}) + \boldsymbol{e}_{3m+2}^{\mathrm{T}} (\sum_{i=1}^{m} h_i \mathrm{R}_i + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} (h_i - h_j)^2 Z_{ij}) \boldsymbol{e}_{3m+2}$;$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_1 = [\boldsymbol{e}_1^T \quad \boldsymbol{h}_1 \boldsymbol{e}_{m+2}^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{h}_m \boldsymbol{e}_{2m+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$;$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_2 = [\boldsymbol{e}_{3m+2}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_{m+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$

其他各项参照定理 1。证明略。

如果不考虑不确定扰动项,可得如下推论。

推论 2:如果存在标量 $\lambda>0$,矩阵 $\boldsymbol{P}(\in \boldsymbol{R}^{(2m+1)n \times (2m+1)n})>0$,$\boldsymbol{Q}_i$, $\boldsymbol{R}_i(\in \boldsymbol{R}^{n \times n})>0$($i=1, 2, \cdots, m$),$\boldsymbol{Z}_{ij}(\in \boldsymbol{R}^{n \times n})>0$($i=1, 2, \cdots, m-1$; $j=i+1, i+2, \cdots, m$),对称矩阵 $\boldsymbol{L}_i$, $\boldsymbol{N}_i$, $\boldsymbol{M}_i \in \boldsymbol{R}^{4n \times n}$($i=1, 2, \cdots, m$),以及任意矩阵 $\boldsymbol{Y}_i \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$($i=1, 2, \cdots, m+2$),对于条件 $0<h_1, h_2, \cdots, h_m<h$,有不等式(16)成立,则系统(1)鲁棒稳定。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Phi}} & \boldsymbol{U}_1 & \cdots & \boldsymbol{U}_m \\ * & \boldsymbol{W}_1 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & \boldsymbol{W}_m \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Pi}_9^{\mathrm{T}} \mathbf{Z}_i \boldsymbol{\Pi}_9$

其他各项参照定理 1。证明略。

3　案例分析

本节分别以单机无穷大系统,典型的二阶时滞系统为例,验证文章所提判据准确性和优越性。

3.1 算例一

以单机无穷大系统为例,系统参数取值文献[7]已给出,在 $D=7.0$(阻尼系数),$K_A=180$ 和 $P_m=1.0$ 的情况下,单一时滞的系统矩阵如下:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 376.99 & 0 & 0 \\ -0.096\,253 & -0.5 & -0.080\,053 & 0 \\ -0.048\,032 & 0 & -0.166\,67 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 38.019 & 0 & -95.256\,0 & 0 \end{bmatrix}$$

假设励磁放大系数存在扰动时,在此扰动影响下的实际系数:

$$\tilde{K}_A = K_A + \Delta K_A \tag{17}$$

式中 ΔK_A 为标量,表示励磁放大系数扰动,矩阵 E_0, E_1, H 取值分别为:$\boldsymbol{E}_0 = 0$。

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta K_A \end{bmatrix}$$

表 1 给出利用文献[9, 14]中的方法和定理 1 计算得到的励磁系统存在扰动时电力系统稳定裕度结果。

表 1　算例一系统稳定裕度

Tab. 1　Stability margin of example 1 system

ΔK_A	时滞稳定裕度/s		
	文献[9]	文献[14]	定理 1
1	0.061 9	0.066 7	0.067 5
2	0.057 4	0.065 0	0.066 8
3	0.051 7	0.063 4	0.066 0
4	0.045 9	—	0.065 3
5	0.040 5	—	0.064 5

表 1 可以看出,当扰动项 ΔK_A 变化时,系统稳定运行所允许的时滞稳定裕度也在变化,并逐渐减小衰弱。定理 1 的结果明显优于文献[9, 14],表明文章方法具有一定的优越性。

3.2　算例二

考虑如下单时滞典型二阶系统:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2.00 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} -1.00 & 0 \\ -1.00 & -1.00 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2 = r\boldsymbol{I}, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}$$

利用文献[14-15]中的方法与推论 1,定理 1 计算,分别得到考虑不确定扰动情况下系统的时滞稳定裕度,其仿真结果如表 2 所示。

从表 2 中可以明显看出,定理 1 可以得到更大的时滞稳定裕度,文章方法较文献[14-15]具有更小的保守性。

表 2 算例二系统的鲁棒稳定性结果

Tab. 2 Robust stability result of example 2 system

r	时滞稳定裕度/s			
	文献[14]	文献[15]	推论 1	定理 1
0	—	6.059	6.059	6.162
0.05	5.060	5.066	5.066	5.147
0.10	4.254	4.261	4.262	4.323
0.15	3.607	3.615	3.616	3.662
0.20	3.087	3.097	3.097	3.132

此外,通过比较推论 1 和定理 1 的仿真结果,定理 1 得到比推论 1 更大的时滞稳定裕度,表明定理 1 中增广项的改变使文章方法具有更小的保守性。

3.3 算例三

考虑如下双时滞典型二阶系统:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2.0 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.6 \\ -0.4 & -1.0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.6 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

利用文献[12, 14]中的方法与推论 2 计算,分别得到双时滞标称系统的时滞稳定裕度,其计算结果如表 3 所示。

表 3 算例三系统的鲁棒稳定性结果

Tab. 3 Robust stability result of example 3 system

θ/(°)	时滞稳定裕度 h/s		
	文献[12]	文献[14]	推论 2
5	2.722 7	2.874 2	3.030 0
10	3.067 1	3.220 9	3.587 8
15	3.770 5	3.694 9	4.761 5
20	4.756 7	4.371 7	6.790 1
25	4.945 5	5.399 0	6.874 4
30	5.081 9	6.268 6	6.404 3
35	6.110 4	7.319 9	5.915 4
40	6.100 3	6.622 2	6.922 6
45	7.496 0	8.085 8	8.719 5
50	5.504 9	5.777 7	6.044 5
55	5.599 1	6.094 4	5.152 4
60	4.966 0	6.133 7	4.723 0
65	4.798 9	5.795 9	4.925 7
70	5.929 8	6.543 3	5.426 9
75	7.836 0	8.638 2	6.843 8
80	11.679 4	12.875 1	10.200 5

其中:$\theta = \arctan(h_2/h_1)$, $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$

从表 3 中可以看出在双时滞角度 θ 变化在 0 ~ 50°范围内时,文章所提方法推论 2 明显优于文献[12, 14]。

4 结束语

文章通过引入新的积分不等式处理方式,构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,分析了多时滞不确定电力系统的鲁棒稳定性。以单机无穷大系统,典型二阶单,双时滞系统为例,通过实例仿真分析得出时滞稳定裕度,与现有文献结果相比较,表明了文章所提方法具有更小的保守性。

参 考 文 献

[1] YAN J, GOVINDARASU M, LIU CC, et al. Risk assessment framework for power control system with PMU-based intrusion response system [J]. Journal of Modern Power Systems and Clean Energy, 2015, 3 (3): 321-331.

[2] XIE Xiao-rong, XIN Yao-zhong, XIAO Jin-yu, et al. WAMS applications in Chinese Power Systems[J]. IEEE Power and Energy Magazine, 2006, 4(1): 54-63.

[3] ZENG Hong-bing, HE Yong, WU Min, et al. New results on stability analysis for systems with discrete distributed delay[J]. Automatica, 2015, 60(10): 189-192.

[4] ZENG Hong-bing, HE Yong, WU Min, et al. Free-matrix-based integral inequality for stability analysis of systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2768-2772.

[5] WU M, HE Y, SHE J H. New delay-dependent stability criteria and stabilizing method for neutral systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(12): 2266-2271.

[6] A SEURET, F GOUAISBAUT. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay syatems[J]. Automatica, 2013, 49(9): 2860-2866.

[7] 贾宏杰, 尚蕊, 张宝贵. 电力系统时滞稳定裕度求解法[J]. 电力系统自动化, 2007, 31(2): 5-11.
Jia Hongjie, Shang Rui, Zhang Baogui. Computation of delay stability margin of electric power systems[J]. Automation of Electric Power Systems, 2007, 31(2): 5-11.

[8] 贾宏杰, 安海云, 余晓丹. 电力系统改进时滞依赖型稳定判据[J]. 电力系统自动化, 2008, 32(19): 15-19.
Jia Hongjie, An Haiyun, Yu Xiaodan. An improved delay-dependent stability criteria for power system with multiple time delays[J]. Automation of Electric Power Systems, 2008, 32(19): 15-19.

[9] 贾宏杰, 安海云, 余晓丹. 电力系统时滞依赖型稳定判据及其应用[J]. 电力系统自动化, 2010, 34(3): 6-11.
Jia Hongjie, An Haiyun, Yu Xiaodan. A delay-dependent robust stability criterion for power system and its application[J]. Automation of Electric Power Systems, 2010, 34(3): 6-11.

[10] 安海云. 基于自由权矩阵理论的电力系统时滞稳定性研究[D]. 天津: 天津大学自动化学院, 2011.

[11] JIANG Yi-lang, JIANG Tao, JIA Hong-jie, et al. A novel LMI criterion for power system stability with multiple time-delays[J]. Science China Technological Science, 2014, 57(7): 1392-1400.

[12] 董朝宇, 贾宏杰, 姜懿郎. 含积分二次型的电力系统改进时滞稳定判据[J]. 电力系统自动化, 2015, 39(24): 35-40.
Dong Chaoyu, Jia Hongjie, Jiang Yilang. Time-delay stability criteria

for power system with integral quadratic form[J]. Automation of Electric Power Systems, 2015, 39 (24): 35-40.
[13]李宁, 孙永辉, 卫志农, 等. 基于 Wirtinger 不等式的电力系统延时依赖稳定判据[J]. 电力系统自动化, 2017, 41(2): 108-113.
Li Ning, Sun Yonghui, Wei Zhinong, et al. Delay- dependent stability criteria for power system with Wirtinger-based integral inequality[J]. Automation of Electric Power Systems, 2017, 41(2): 108-113.
[14]李晓萌, 贾宏杰. 电力系统改进时滞依赖型鲁棒稳定判据[J]. 电力系统及其自动化学报, 2018, 30(4): 114-120.
Li Xiaomeng, Jia Hongjie. Improved Time Delay dependent Robust Stability Criteria for Power System[J]. Proceedings of the CSU-EPSA, 2018, 30(4): 114-120.
[15]孙永辉, 李宁, 卫志农, 等. 多时滞不确定电力系统的改进时滞依赖鲁棒稳定判据[J]. 电力系统自动化, 2017, 41(16): 117-122.
Sun Yonghui, Li Ning, Wei Zhinong, et al. Improved Robust Delay-dependent Stability Criteria for Power Systems with Multiple Time Delays and Uncertain Parameters[J]. Automation of Electric Power Systems, 2017, 41(16): 117-122.
[16]XIE L. Output feedback H∞ control of systems with uncertainty[J]. International Journal of Control, 1996, 63(4): 741-750.
[17]HAN Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity[J]. Automatica, 2005, 41(12): 2171-2176.

作者简介:

沈力(1992—),男,汉族,江苏淮安人,助理工程师,硕士研究生,研究方向为鲁棒控制,网络化电力系统稳定分析与控制。

肖会芹(1977—),通信作者,女,汉族,河北定州人,博士,副教授,主要研究方向为为鲁棒控制,智能控制和模糊控制。Email: xiaohq_610@126.com

收稿日期:2018-10-05;修回日期:2018-11-06
(杜景飞 编发)

(上接第 39 页)

[15]郑录军, 魏汝浩, 王栋, 等. 基于 G1 法和熵值法的人民银行 IT 应急能力评估模型及实证研究[J]. 信息网络安全, 2015, (11): 84-89.
Zheng Lujun, Wei Ruhao, Wang Dong, et al. Research on Evaluation Model and Its Verifi cation of IT Emergency Response Capabilities of the People,s Bank of China Based on G1 and Entropy Method[J]. Netinfo Security, 2015, (11): 84-89.
[16]朱奇, 郭江, 曾兵, 等. 基于层次分析法的输电线路防山火预警评估模型[J]. 电测与仪表, 2018, 55(6): 71-88.
[17]Zhang M, Wang Y, Chai J. The movie user satisfaction evaluation research on broadcasting and television based on the entropy value method [C]//IEEE International Conference on Computer Communication and the Internet. IEEE, 2016: 224-227.
[18]刘俊华, 罗隆福, 张志文, 等. 一种考虑排序稳定分析的电能质量综合评估新方法[J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(1): 70-76.
[19]吴翔, 何怡刚, 张大波, 等. 基于最优权重与雷达图的变压器状态评估[J]. 电力系统保护与控制, 2017, 45(2): 55-60.
[20]张秀菊, 李嘉欢, 丁凯森. 基于最小偏差的组合权重模型在水资源应急管理能力评价中的应用[J]. 水电能源科学, 2016, 34(6): 22-26.

作者简介:

程志友(1972—),男,博士,教授,硕士研究生导师,从事电能质量分析、检测和评估等问题的研究。
Email:czy@ahu.edu.cn

朱唯韦(1992—),女,硕士研究生,研究方向为电能质量分析与控制。
Email:1445438578@qq.com

收稿日期:2018-05-31;修回日期:2018-06-29
(杜景飞 编发)